# 2021-2022 秋冬学期高等代数模拟期中测验参考答案

一、求行列式. (1)

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

求 $D_n$.

(2) 计算

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解. (1) 将 $D_n$ 按最后一行展开，得到

$$D_n=5D_{n-1}-2\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 3 \end{vmatrix}=5D_{n-1}-6D_{n-2}\ (n\geq 3).$$

解差分方程，得到 $D_n=c_1\cdot 3^{n+1}+c_2\cdot 2^{n+1}$. 又经简单计算得到 $D_1=5, D_2=19$, 于是解得 $c_1=1, c_2=-1$，从而 $D_n=3^{n+1}-2^{n+1}$

(2) 记行列式为 $A$，对 $A$ 进行加边处理，即

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

从而

$$A = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} a_i$$

□

二、设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的行列式为 $|\boldsymbol{A}|$, 并记 $|\boldsymbol{A}|$ 消去第 $i$ 行第 $j$ 列得到的代数余子式为 $A_{ij}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

解. 记待求的行列式为 $A(x)$，则

$$\begin{aligned}
A(x) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x\cdot\sum_{i=1}^{n}A_{i1} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}A_{ij} \\
&= \cdots \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\cdot\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij} \\
&= |\boldsymbol{A}| + x\cdot\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}
\end{aligned}$$

□

三、试问 $a, b$ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 2b-1 \end{cases}$$

有解？有解时求其（通）解.

解. 对增广矩阵作行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b=3 & 2b-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array}\right)$$

$b=-1$ 时，增广矩阵的秩大于系数矩阵的秩，方程无解.

$b \neq -1$ 时，解得 $x_3 = 2(b-1)/(b+1)$. 继续作行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1-\frac{2}{b+1}R_3]{R_2-\frac{R_3}{b+1}} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & \frac{5-3b}{b+1} \\ 0 & b-1 & 0 & -\frac{2(b-1)}{b+1} \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array}\right)$$

$b=1$ 时，$x_3=0$，$ax_1+x_2=1$. 方程有无穷多解，满足 $x_1$ 任意，$x_2 = 1-ax_1$，$x_3=0$.

$b \neq \pm 1$ 时，解得 $x_2 = -2/(b+1)$. 继续作行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & \frac{5-3b}{b+1} \\ 0 & b-1 & 0 & -\frac{2(b-1)}{b+1} \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-\frac{b}{b-1}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & \frac{5-b}{b+1} \\ 0 & b-1 & 0 & -\frac{2(b-1)}{b+1} \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array}\right)$$

若 $a=0$，分两种情况：

(1) $b=5$ ，此时方程有无穷多解，$x_1$ 任意，$x_2=-\frac{1}{3}$，$x_3=\frac{4}{3}$.

(2) $b\neq 5$, 此时方程无解.

若 $a\neq 0$ 且 $b\neq\pm 1$，则方程组有唯一解如下：

$$x_1 = \frac{5-b}{a(b+1)}, x_2 = -\frac{2}{b+1}, x_3 = \frac{2(b-1)}{b+1}.$$

□

四、设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，其伴随矩阵记为 $\boldsymbol{A}^*$, 求证：

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})\le n-2.\end{cases}$$

证明. (1) $r(\boldsymbol{A})=n$，此时 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*/|\boldsymbol{A}|$ 可逆，自然满秩.

(2) $r(\boldsymbol{A})=n-1$，此时 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 由 $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)\ge r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^*)-n$，知 $r(\boldsymbol{A}^*)\le 1$. 另一方面，$r(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个代数余子式不为 0，从而 $r(\boldsymbol{A}^*)\ge 1$，因此 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

(3) $r(\boldsymbol{A})\le n-2$，此时 $\boldsymbol{A}$ 的每个 $n-1$ 阶子式均为 0，从而 $\boldsymbol{A}^*=0$,$r(\boldsymbol{A}^*)=0$. □

五、请证明以下几种矩阵分解：

(1) 任意 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 均可分解为一个可逆矩阵与一个幂等矩阵的乘积.

(2) (满秩分解) 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 若 $r(\boldsymbol{A})=r$, 则存在秩均为 $r$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{m\times r}$,$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{r\times n}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$.

(3) (秩 1 分解) 任意秩为 $r$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均可分解为 $r$ 个秩为 1 的矩阵之和.

证明. (1) 设 $r(\boldsymbol{A})=r$，则存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$. 记 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 为幂等阵. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^{-1}$ 记 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}$,$\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^{-1}$. 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}_1$ 是一个可逆阵与幂等阵的乘积.

(2)$r(\boldsymbol{A})=r$，则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{Q}_0$，使 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r))}\end{pmatrix}$, 又注意到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r))}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}$$

于是记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}_0^{-1}$ 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ 即为所求.

(3) 由 (2)，可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_0^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r))}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}_0^{-1}$. 记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为与 $\boldsymbol{A}$ 同尺寸的，除 $(i,j)$ 元素为 1 外，其余部分全为 0 的矩阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_0^{-1}(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+\cdots+\boldsymbol{E}_{rr})\boldsymbol{Q}_0^{-1}$. 再记 $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{P}_0^{-1}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{Q}_0^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}_i$ 的秩为 1，于是秩 1 分解 $\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^r\boldsymbol{A}_i$ 成立. □

六、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶方阵. 对于任意的 $\lambda\neq 0$，求证：$\boldsymbol{AB}X=\lambda X$ 有非零解当且仅当 $\boldsymbol{BA}X=\lambda X$ 有非零解. 并由此验证 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$ 对所有 $\lambda\in\mathbb{R}$ 成立.

证明. 设方程 $\boldsymbol{ABX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 有非零解 $\xi$，即 $\boldsymbol{AB}\xi=\lambda\xi$. 等式两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$，得到 $\boldsymbol{BAB}\xi=\lambda\boldsymbol{B}\xi$. 注意到 $\boldsymbol{B}\xi$ 也非零，否则 $\lambda\xi=\boldsymbol{AB}\xi=0$，引起矛盾，从而方程 $\boldsymbol{BAX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 有非零解 $\boldsymbol{B}\xi$. 同理也可以证明方程 $\boldsymbol{BAX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 有非零解时，方程 $\boldsymbol{ABX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 也有非零解.

考虑到 $\lambda=0$ 时，$|-\boldsymbol{AB}|=|-\boldsymbol{BA}|$ 显然成立，从而根据上述结果得到，行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|$ 与 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$ 作为关于 $\lambda$ 的多项式，有完全相同的零点. 又考虑到两个多项式都是首 1 的，从而由 Vieta 定理，推知 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|$ 与 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$ 的对应项系数均相等，从而 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$ 对任何 $\lambda$ 总成立. □

七、设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵，求证：仅用第三类初等变换就可以将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角阵 $\operatorname{diag}\{1,1,\cdots,|\boldsymbol{A}|\}$.

证明. 采用数学归纳法完成证明.

显而易见的，$n=1$ 时命题成立. 为方便起见，对 $n=2$ 时的情况具体构造一系列第三类初等变换加以证明.

$n=2$ 时，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. 不妨设 $a\neq 0$，因若 $a=0$，则只需将第二行加至第一行就得到 $a\neq 0$. 将该矩阵作初等变换如下：

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-\frac{c}{a}R_1}\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & \frac{|\boldsymbol{A}|}{a}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-abR_2/|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & \frac{|\boldsymbol{A}|}{a}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+|\boldsymbol{A}|\frac{a-1}{a^2}R_1}\begin{pmatrix} a & 0\\ |\boldsymbol{A}|\frac{a-1}{a} & \frac{|\boldsymbol{A}|}{a}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{C_2+C_1}\begin{pmatrix} a & a\\ |\boldsymbol{A}|\frac{a-1}{a} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-aR_2/|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ |\boldsymbol{A}|\frac{a-1}{a} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-|\boldsymbol{A}|\frac{a-1}{a}R_1}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}.$$

从而 $n=2$ 时结论成立.

假设矩阵阶数小于 $n$ 时结论都成立，则阶数为 $n$ 时，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$. 同样的，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则用与 $n=2$ 时同样的操作，可以将 $a_{11}$ 化为 1，并将第一行以及第一列中其他元素全化为 0. 换言之 $\boldsymbol{A}$ 可以通过第三类初等变换化为分块对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{n-1}\end{pmatrix}$. 由归纳假设，$\boldsymbol{A}_{n-1}$ 可由第三类初等变换化为对角阵 $\operatorname{diag}\{1,1,\cdots,|\boldsymbol{A}_{n-1}|\}$，而第三类初等变换不改变行列式的值，因此 $|\boldsymbol{A}_{n-1}|=|\boldsymbol{A}|$. 综上，$\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶时，可以通过第三类初等变换化为对角阵 $\operatorname{diag}\{1,1,\cdots,|\boldsymbol{A}|\}$.

于是由数学归纳法，可知命题对所有的阶数 $n$ 都成立. □