参考答案:

一、(1)$(x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)\cdots(x_n-a_nb_n)\left(1+\frac{a_1b_1}{x_1-a_1b_1}+\frac{a_2b_2}{x_2-a_2b_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{x_n-a_nb_n}\right)$

(2)$(-1)^n\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$

提示:(1)将行列式拆成两个行列式的和。（2）利用Laplace定理。

二、当$\lambda\neq 0$时不相容，当$\lambda=0$时相容，且通解为:

$$x_1=\frac{-5x_3-13x_4-3}{2},\quad x_2=\frac{-7x_3-19x_4-7}{2}$$

解析:

一、（1）记$\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$为$D_n$，则有

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-a_nb_n)\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & a_{n-1}b_3 & \cdots & x_{n-1} \end{vmatrix}+a_nb_n\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1 \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-a_nb_n)D_{n-1}+a_nb_n\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & 0 & x_3-a_3b_3 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-a_nb_n)D_{n-1}+a_nb_n(x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)\cdots(x_{n-1}-a_{n-1}b_{n-1})$$

即

$$\frac{D_n}{(x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)\cdots(x_n-a_nb_n)}=\frac{D_{n-1}}{(x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)\cdots(x_{n-1}-a_{n-1}b_{n-1})}+\frac{a_nb_n}{x_n-a_nb_n}$$

递归即得。

（2）选取偶数列利用Laplace定理，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \cdots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \cdots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \cdots & c_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \cdots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+4+\cdots+2n+1+3+\cdots+2n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

利用范德蒙德行列式即得。

二、过程略。

三、考虑n阶矩阵A，B。矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$经过初等行变换得到$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$，再经过初等列变换得到$\begin{pmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{pmatrix}$。由于初等变换时矩阵秩不变，则该矩阵的秩为r(A)+r(B)。又该矩阵包括A+B，则有r(A)+r(B)≥r(A+B)。

四、充分性是显然的。下证必要性：

记$A=\{a_{ij}\}_n, B=\{b_{ij}\}_n$，按矩阵乘法定义展开，

$$(AB)_{ij} = \Sigma_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = (BA)_{ji} = \Sigma_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$$
$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{in}a_{nj}$$

令$i \neq j$，则

$$b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{nj}a_{in} - b_{i1}a_{1j} - b_{i2}2j - \cdots - b_{in}a_{nj}$$
$$+(b_{jj} - b_{ii})a_{ij} + b_{ij}(a_{ii} - a_{jj}) = 0$$

上式可视为$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, \ldots, a_{nj}, a_{ij}, a_{ii} - a_{jj}$这$2n-2$个元的线性方程，且观察可以发现它们的系数互相独立变化。考虑到B的任意性，要使上式恒成立，所有这些变量都为0.

取$(i,j) = (1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n), (n,1)$，可得对任意$i \neq j, 1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = 0; a_{ii} = a_{jj}$，即$A$为数量矩阵。命题得证。

五、（注：$det(A)$表示A的行列式，$rank(A)$表示A的秩。）

设A为n阶矩阵。若A为满秩矩阵，则

$$det(A) = det(-A^T) = (-1)^n det(A^T) = (-1)^n det(A)$$

由于$det(A) \neq 0$，即有$2|n = rank(A)$。

若$rank(A) = r < A$，则存在可逆矩阵P, Q，使得

$$A = P\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = P\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q(P^T)^{-1}P^T$$

$$P^{-1}A(P^T)^{-1} = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q(P^T)^{-1}$$

$$P^{-1}A(P^{-1})^T = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} C$$

C为可逆矩阵。记等式左边为D，

$$\begin{aligned} D^T &= (P^{-1}A(P^{-1})^T)^T = P^{-1}A^T(P^{-1})^T = P^{-1}(-A)(P^{-1})^T \\ &= -P^{-1}A(P^{-1})^T = -D \end{aligned}$$

这说明D是反对称矩阵，则等式右边也是反对称矩阵。

$$D^T = (\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} C)^T = C^T\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

由于可逆矩阵左乘等价于作连续初等行变换，右乘等价于作连续初等列变换，则有

$$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ O & O \end{bmatrix} = -C^T\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} D_3 & O \\ D_4 & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ O & O \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} D_3 & O \\ D_4 & O \end{bmatrix}$$

式中D_i均为矩阵，且D_1, D_3为r阶方阵。由于$D^T = -D$，则$D_4 = D_2 = O$,D_1, D_3都为反对称矩阵。初等行列变换不改变秩，它们的秩仍为r，两者都是满秩矩阵。由第一步的结论知，r为偶数。得证。

六、首先考虑M位于左上角的情形。有

$$M' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} & A_{1,m+1} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} & A_{2,m+1} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} & A_{m,m+1} & \cdots & A_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

用扩展过的M'左乘D^T，计算得到

$$M^{'}D^{T}=\begin{vmatrix} D & & & & & & \\ & D & & & & & \\ & & D & & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & D & & \\ a_{1,m+1} & a_{2,m+1} & a_{3,m+1} & \cdots & a_{m,m+1} & \cdots & a_{n,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{m,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} D & & & & & & & \\ & D & & & & & & \\ & & D & & & & & \\ & & & \cdots & & & & \\ & & & & D & & & \\ & & & & & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{n,m+1} \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & a_{m+1,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}=D^{m}A$$

由于$D=D^{T}$，当$D\neq 0$时已经得证。如果认为D的元素不是数而是独立变量，则$D=0$的情形可以略去。此时行列式将是异于零的多项式且已经证明该等式恒成立。这意味着，它对变量a_{ij}而言在任何数值下都是正确的，与D是否等于零无关。

此时命题已经得证。若M不在左上角，则需要考虑初等互换。容易证明：如果在D中将两列（行）互换，则转置伴随行列式D'中的对应两列也将发生互换，且D'中所有元素变号。（下略）