# 2021-2022 秋冬学期微积分期中模拟考试参考答案

命题、组织：丹青学业指导中心

一、

(1) 参考课本定义.

(2) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+16}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{16x}{\sqrt{x^2+16}+x} = 8.$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^x \\ \ln f(x) &= x\ln x \\ (\ln f(x))' &= \ln x + 1 \\ f'(x) &= x^x(\ln x + 1) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}) \\ f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}((\frac{1}{1-x})^{(n)} - (\frac{1}{1+x})^{(n)}) \end{aligned}$$

通过数学归纳法，可以得到

$$(\frac{x}{1-x})^{(n)} = \frac{n!}{2}[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}].$$

(5) （6）题参看四（乙）的第1第5小问

二、

(1) 设 $b, c \in o(a)$，则 $\lim_{x\to x_0} \frac{b}{a} = 0, \lim_{x\to x_0} \frac{c}{a} = 0, \lim_{x\to x_0} \frac{b+c}{a} = 0$，所以 $b+c \in o(a)$，因此 $o(a)+o(a) = o(a)$.

(2) 设 $b \in o(a)$，则 $\lim_{x\to x_0} \frac{b}{a} = 0$，$\lim_{x\to x_0} \frac{cb}{ca} = 0, c \in \mathbb{R}$，所以 $cb \in o(a)$，因此 $o(ca) = co(a), c \in \mathbb{R}$.

(3) 设 $b \in o(a)$，则 $\lim_{x\to x_0} \frac{b}{a} = 0$，$\lim_{x\to x)} \frac{b^k}{a^k} = 0$，所以 $b^k \in o(a^k)$，因此 $o(a)^k \in o(a^k)$.

(4) $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 + \cdots + (-1)^n a^n + \cdots$，按照定义证明即可.

三、

考虑 $x = 0$ 时的特殊情况。

(1) 若 $a > 0$，$\lim_{x\to 0} x^a \sin x^{-b} = 0$;

若 $a \leq 0$，$\lim_{x\to 0} x^a \sin x^{-b}$ 不存在.

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= ax^{a-1}\sin x^{-b} + x^a \cos x^{-b}(-bx^{-b-1}) \\ &= ax^{a-1}\sin x^{-b} - bx^{a-b-1}\cos x^{-b} \to 0 (x \to 0) \end{aligned}$$

若 $f$ 在 0 可微，则必有 (1) 成立.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^a \sin x^{-b}}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} x^{a-1}\sin x^{-b} \end{aligned}$$

当且仅当 $a > 1$ 时，$f'(0) = 0$.

(3) 满足 (2) 条件下，$f'$ 有界，$a - b - 1 \geq 0 \Rightarrow a \geq b + 1$.

(4) $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \Rightarrow a - b - 1 > 0 \Rightarrow a > b + 1$.

(5) 求出 $f''$ 表达式，考虑其在极限点的取值.

四、(乙)

(1) $f'(x) = e^{x-1} + \frac{3}{3x-1} + 2\cos(2x+1)$.

(2) $g'(x) = 4(2x-1)(\tan(x) - 1) + (2x-1)^2\left(\sec^2(x)\right)$.

(3) $h'(x) = \frac{(1+\sin(x))\left(x^2-2x+1\right)-(x-\cos(x))(2x-2)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$.

(4) 令 $u = \sqrt{x^3 - \frac{1}{x} + 2}, m = \sin u$，

$$m'(x) = \frac{dm}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{x^3 - \frac{1}{x} + 2}\right)\left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x} + 2\right)^{-1/2}.$$

(5) 令 $n(x) = 3^{2x+3} + \log_3(2x-1) = e^{(2x+3)\ln 3} + \frac{\ln(2x-1)}{\ln 3}$，

$$n'(x) = (2\ln 3)e^{(2x+3)\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\frac{2}{2x-1} = (2\ln 3)3^{2x+3} + \frac{2}{\ln 3(2x-1)}.$$

四、（甲）

$|a_{n+1}|=|\sin(a_n)|\le|a_n|$. 因此，$|a_n|$ 单调递减且下界是 0. 因此，$|a_n|$ 收敛到某个 $a_\infty$，且我们一定有 $\sin(a_\infty)=a_\infty$, 即 $a_\infty=0$ 因为 $\sin(x)=x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}&=\frac{1}{\sin^2(a_n)}-\frac{1}{a_n^2}\\&=\frac{a_n^2-\sin^2(a_n)}{a_n^2\sin^2(a_n)}\\&=\frac{\frac{1}{3}a_n^4+O(a_n^6)}{a_n^4+O(a_n^6)}\\&=\frac{1}{3}+O\left(a_n^2\right)\end{aligned}$$

由 Stolz-Cesàro 可知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n^2}}{n}=\frac{1}{3}$$

即

$$a_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}.$$

五、

(1)

这里的基础是对于任何 $\alpha$ 成立

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u^\alpha}{\mathrm{e}^u}=0$$

先计算 $f'(0)$. 按定义计算并作代换 $y=1/x$, 就有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}=0$$

然后求出 $x\neq0$ 时的导函数表达式

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

再按定义计算出

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

然后求出 $x \neq 0$ 时的二阶导函数表达式

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \\
f^{(n)}(x) &= P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}} \\
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(h)}(x)\right)' \\
&= \left(P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\
&= P_k'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{\pi^2}} + P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \left[P_k'(y)\left(-y^2\right) + P_k(y)\left(2y^3\right)\right]\Big|_{y=\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}
$$

$n = 1, 2$ 时已经成立. 设在 $n = k$ 时已有 $f^{(k)}(0) = 0$, 则对于 $n = k + 1$, 可以林用 $n = k$ 和 $x \neq 0$ 时 $f^{(k)}(x)$ 的上述特殊形式作以下计算:

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0
\end{aligned}
$$

点上的任何阶导数等于 0.

(2)

先定义

$$
g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}
$$

然后令

$$
f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(1 - x)}
$$

则 $f(x)$ 就满足要求.