2021-2022 学年秋冬学期数学分析期中模拟考试

命题、组织：WenKy/丹青学业指导中心

参考答案

计算题（50'）

1. 解:$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha((1+\frac{1}{n})^\alpha - 1) < n^\alpha((1+\frac{1}{n}-1) = n^{\alpha-1}$
   又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1} = 0$
   由追敛性原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$
2. 解: 运用等价无穷小量 $(1+\alpha)^t \sim 1+\alpha t(t\to 0)$
   原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} x^2(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2[(1+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})) - (1-\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2}))] = \lim\limits_{x\to\infty} x^2(\frac{2}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})) = \frac{2}{3}$
3. 解: 运用等价无穷小量 $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}(x\to 0)$ 和 $\tan x \sim x(x\to 0)$
   原式 $= \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x}) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}$
4. 解:$x_1 \in (0,\frac{\pi}{2})$，归纳原理易知，$x_{n+1} = \sin x_n \in (0,1) \subset (0,\frac{\pi}{2})$，且 $x_{n+1} < x_n$
   由单调有界定理，知 x_n 收敛，设 $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow c = \sin c \Rightarrow c = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
   知 $\sin x_n \sim x_n(n\to\infty)$
   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sin {x_n}^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n{x_n}^2} \overset{Stolz}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{{x_{n+1}}^2} - \frac{1}{{x_n}^2}}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{{x_{n+1}}^2} - \frac{1}{{x_n}^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sin {x_n}^2} - \frac{1}{{x_n}^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n+\sin x_n)(x_n-\sin x_n)}{{x_n}^2\sin {x_n}^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2x_n)\cdot\frac{{x_n}^3}{6}}{{x_n}^4} = \frac{1}{3}$
   故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin x_n = \sqrt{3}$

证明题（50'）

1. (1) 任取 $x \in U_+^\circ(x_0), f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上满足拉格朗日定理条件, 则存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$
   由于 $x_0 < \xi < x$, 因此当 $x\to x_0^+$ 时, 随之有 $\xi \to x_0^+$, 对 (7) 式两边取极限, 便得
   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'(\xi) = f'(x_0+0)$$

(2) 同理可得 $f'(x_0) = f'(x_0 - 0)$. 因为 $\lim_{x\to x_0} f'(x) = k$ 存在, 所以 $f'(x_0+0) = f'(x_0-0) = k$, 从而 $f'_+(x_0) = f'(x_0) = k$, 即 $f'(x_0) = k$. 证毕

2. 证: 构造函数 $F(x) = f(x) - 2f(\frac{a+x}{2}) + f(a) - \frac{(x-a)^2}{4}M$，令 $F(b) = 0 = F(a)$

   则由 Rolle 中值定理，$\exists c \in (a,b), \quad s.t. \quad F^{'}(c) = f^{'}(c) - f^{'}(\frac{a+c}{2}) - \frac{M}{2}(c-a) = 0$

   $\Rightarrow M = \frac{f^{'}(c) - f^{'}(\frac{a+c}{2})}{c - \frac{a+c}{2}} \overset{\exists \xi \in (\frac{a+c}{2}, c), Lagrange}{=} f^{''}(\xi)$

   代回 $F(b) = 0$ 即证得原命题成立。

3. 证明: 充分性易证，下仅证明必要性。

   由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。知 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \quad x, y \in [0,+\infty), |x-y| < \delta \ , |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$

   而 $\forall h > 0, \lim\limits_{n\to\infty} f(nh)$ 存在，知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n\delta)$ 存在。

   由 Cauchy 收敛准则，$\exists N, s.t. \quad \forall m, n > N. \ |f(m\delta) - f(n\delta)| < \frac{\epsilon}{3}$

   取 $X = N\delta$, 使得对 $x, y > X, \exists m, n \geqslant N, s.t. \quad x \in [m\delta, (m+1)\delta), y \in [n\delta, (n+1)\delta)$

   $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(m\delta)| + |f(m\delta) - f(n\delta)| + |f(n\delta) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

   即 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0, s.t. \quad x, y > X \ , |f(x) - f(y)| < \epsilon.$

   由 Cauchy 收敛准则，知 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在