2021-2022 学年秋冬学期微积分期中模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

模拟期中考试须知：

欢迎大家参加由丹青学园指导中心举办的模拟期中考，下面是考试须知。

1. 请将除答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。

2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。

3. 本场考试持续两个小时，开考后迟到二十分钟及以上者不得参加本次考试，考试进行三十分钟后方能交卷离开。

4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了信息发出后，应立即停止答题，离开考场。

5. 遵守考场纪律。

6. **因提前考试以及教学班进度差异，考试可能出现还没学或者超纲题目，考试范围以老师要求范围为准。**

一、$(30')$

(1). $(5')$用$\epsilon-\delta$语言陈述极限的定义，并用定义证明$\lim_{x\to 1}x^2=1$.

(2). $(6')\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)$.

(3). $(6')f(x)=x^x$，求$f'(x)$.

(4). $(7')f(x)=\frac{x}{1-x^2}$，求$f^{(k)}(x)$.

(5)（甲）$(6')n(x)=3^{2x+3}+\log_3(2x-1)$

(6)（乙）$(6')f(x)=e^{x-1}+\ln(3x-1)+\sin(2x+1)$

二、$(20')$如果函数f在x_0的附近（即某个x_0的开邻域去掉x_0）满足$\lim_{x\to x_0}f(x)=0$，我们就称f是$x\to x_0$时的无穷小量；类似地，如果$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$或者$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$，我们就称$f$是$x\to x_0$时的无穷大量。现在假设$f,g$都是$x\to x_0$时的无穷小量并且$g(x)$在$x_0$的附近不取零值，我们现在引进记号：

–如果$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，我们就称$f$是比$g$高阶的无穷小，记作$f(x)=o\big(g(x)\big),x\to x_0$；

–如果$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell,\ell\neq 0$，我们就称$f$是与$g$同阶的无穷小；

–特别地，如果f与g同阶并且$\ell=1$，我们就称f是与g等价的无穷小，记作$f(x)\sim g(x),x\to x_0$

类似地，我们可以定义无穷大量的阶之间的比较。假设$x\to x_0$时，函数$a(x)$满足$a=o(1)$。试证明：

(1) $o(a)+o(a)=o(a)$；

(2) $o(ca)=\text{c}o(a),\quad c\in\mathbb{R}$

(3) $o(a)^k=o(a^k)$；

(4) $\frac{1}{1+a}=1-a+o(a)$.

三、$(25')$设$a,b\in\mathbb{R},b>0$，考察函数$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$，其中

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^{-b}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

证明，下述关于f的结论都成立：

(1) $f\in C([-1,1])$当且仅当$a>0$；

(2) f在 0 处可微当且仅当$a>1$；

(3) f'在$[-1,1]$上有界当且仅当$a\geq 1+b$；

(4) $f\in C^1([-1,1])$当且仅当$a>1+b$；

(5) f'在 0 处可微当且仅当$a>2+b$.

提示：

1. C^1函数的定义：函数的一阶导数连续.

四、(乙) $(15')$计算下列函数的导数.

(1) $g(x)=(2x-1)^2(\tan(x)-1)$

(2) $h(x)=\frac{x-\cos(x)}{x^2-2x+1}$

(3) $m(x)=\sin\left(\sqrt{x^3-\frac{1}{x}+2}\right)$

四、（甲）（15’） 令$\{x_n\}_{n\geq 1}$满足

$$\begin{cases}x_1=1\\x_{n+1}=\sin x_n,\forall n\geq 1\end{cases}$$

(1) 证明x_n非增且$x_n\to 0$.

(2) $(x_{n+1}^{-2}-x_n^{-2})\to l(\neq 0)$，求$l$.

(3) $x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}(n\to\infty)$

提示:

Stolz-Cesàro 定理：设$\{a_n\}_{n\geq 1}$和$\{b_n\}_{n\geq 1}$是两个实数列。若满足条件(1)(2)之一：

(1) $\{b_n\}_{n\geq 1}$是严格单调发散的数列,

(2) $\{a_n\}\to 0,\{b_n\}\to 0$，且$\{b_n\}_{n\geq 1}$是严格单调的数列.

且极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$存在，那么有$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

五、(10’）令

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0\\0, & x\leq 0\end{cases}$$

(1) 证明$f(x)$在 0 点可微且$f^{(k)}(0)=0,\forall k\in\mathbb{N}$.

(2) 求函数$g(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$，使得$g(x)=0,\forall x\leq 0;g(x)=1,\forall x\geq 1$.

提示:

1. C^∞函数的定义：函数的任意阶导数都连续.

1. 考虑g的 0, 1 处的各阶导数.

up主 丹青学指　　学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。

演草纸：

答题卡：

答题卡：

答题卡：