2021-2022 学年秋冬学期高等代数期中模拟考试

命题、组织：丹青学业指导中心

模拟期中考试须知：

欢迎大家参加由丹青学园学业指导中心举办的模拟期中考，下面是考试须知。

1. 请将答题必备工具外的物品放到讲台上，电子设备关机或静音。

2. 请对号入座，并将身份证或校园卡放在桌面左上角。

3. 本场考试持续两个小时。开考后迟到二十分钟及以上不得参加考试，考试进行三十分钟后方可交卷离开考场.

4. 开考信号发出后方可开始答题，考试终了时间一到，应立即停止答题，离开考场。

5. 因提前考试以及教学班进度差异，考试可能出现还没学或者超纲题目，考试范围以老师要求范围为准。

一、求行列式. (1)

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

求 D_n.

(2) 计算

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

二、设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的行列式为 $|\boldsymbol{A}|$, 并记 $|\boldsymbol{A}|$ 消去第 i 行第 j 列得到的代数余子式为 A_{ij}. $\forall x\in\mathbb{R}$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

三、试问 a, b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 2b-1 \end{cases}$$

有解？有解时求其（通）解.

四、设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其伴随矩阵记为 $\boldsymbol{A}^*$, 求证：

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A}) \le n-2. \end{cases}$$

五、请证明以下几种矩阵分解：

(1) 任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 均可分解为一个可逆矩阵与一个幂等矩阵的乘积.

(2) (满秩分解) 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 若 $r(\boldsymbol{A}) = r$, 则存在秩均为 r 的矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m\times r}, \boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{r\times n}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PQ}$.

(3) (秩 1 分解) 任意秩为 r 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均可分解为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

六、设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 对于任意的 $\lambda \neq 0$，求证：$\boldsymbol{AB}X = \lambda X$ 有非零解当且仅当 $\boldsymbol{BA}X = \lambda X$ 有非零解. 并由此验证 $|\lambda \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB}| = |\lambda \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{BA}|$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立.

七、设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵，求证：仅用第三类初等变换就可以将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角阵 $\mathrm{diag}\{1, 1, \cdots, |\boldsymbol{A}|\}$.

up主 丹青学指　　学指菌QQ号

因为时间和人力原因我们不能统一批改试卷，大家答题完毕后可把试卷带出考场。试卷分析将在之后发布在丹青学指的官方 QQ 和 B 站账号上，请扫描上方二维码获取。

因提前考试以及部分考试范围未知，考试可能出现还没学或者超纲题目，考试范围以老师要求范围为准。

演草纸:

答题卡:

答题卡:

答题卡: